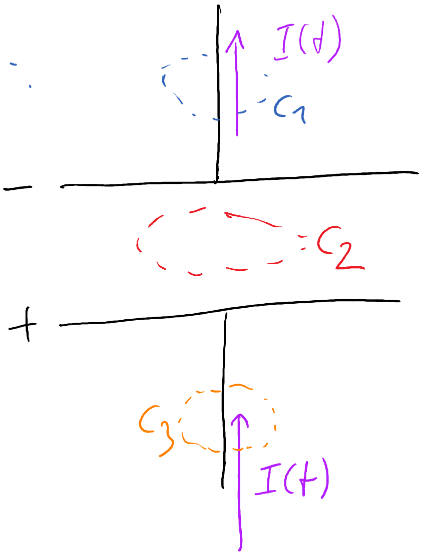
5.5. MAXWELL-GLEICHUNGEN

5.5.1. MAXWELL'SCHER VERSCHIEBUNGSSTROM

Gedankenexperiment: Wechselstrom durch Kondensator



Elektrostatik

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

Unabhängig vom Weg!

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

ABER: $\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$? ↯

Maxwell:

Ersetze $I \longmapsto I + I_V$

I: Konventioneller Strom = freie e^- und Ionen folgen dem $\vec{E}$-Feld

I_V: Verschiebungsstrom (im Dielektrikum werden Ladungen verschoben)

Verschiebungsstrom

$$I_V = \frac{d}{dt} \underbrace{Q_{Kondensator}}_{\text{Gaußscher Satz}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\varepsilon_0 \cdot A \cdot E} = \varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{dE}{dt}$$

↳ Verschiebungsstromdichte $\boxed{j_V = \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt}}$

→ Verschiebungsstromdichte $\boxed{\vec{j}_V = \varepsilon_0 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt}}$

Damit

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I = \mu_0 \int_A \Big(\overbrace{\vec{j}}^{=0 \text{ im Kondensator}} + \underbrace{\vec{j}_V}_{=0 \text{ im Leiter}} \Big) \cdot d\vec{A}$$

Damit auch

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot}\, \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_V \right) \\ &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

weil $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

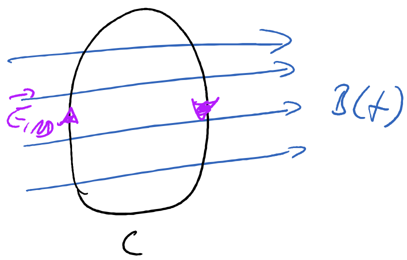
c = Lichtgeschw.

Magnetfelder werden sowohl durch Ströme als auch durch zeitl. veränderl. elektrische Felder erzeugt

5.5.2 INDUKTIONSGESETZ DIFFERENTIELL

Induktionsgesetz

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = U_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

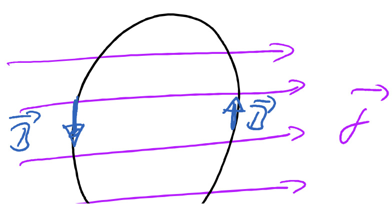


in differentieller Form

$$\boxed{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

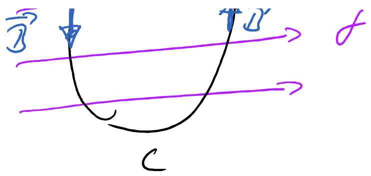
vgl. Ampère'sches Gesetz

$$\mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{A} = \mu_0 \cdot I = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



↳

↳ diff. Form $\mu_0 \vec{j} = \text{rot}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$



Allg. Satz von Stokes

alternierende Differentialform

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Mannigfaltigkeit

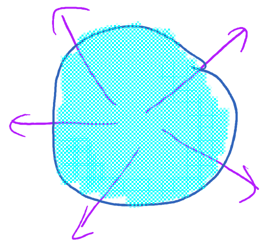
Rand der Mannigfaltigkeit

• Gauß'scher Integralsatz

$$\int_V \text{div}\,\vec F\, dV = \oint_{\partial V} \vec F \cdot d\vec A$$

Volumen

Oberfläche

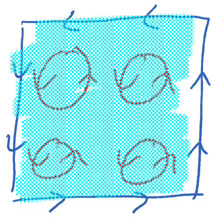


• Integralsatz von Stokes

$$\int_A \text{rot}\,\vec F\, dA = \oint_{\partial A} \vec F \cdot d\vec \ell$$

Oberfläche

geschl. Rand

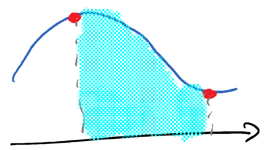


• Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_\ell \text{grad}\, F\, d\ell = \int_{\partial \ell} F\, d\ell = F(b) - F(a)$$

Linie

Endpunkt



Im Beispiel:

$$\oint_C \vec E\, d\vec \ell = \int_A \underline{\text{rot}\,\vec E}\, dA = \underline{-}\int_A \underline{\frac{\partial \vec B}{\partial t}}\, dA$$ für beliebige A mit $\partial A = C$

↳ $$\text{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$$

5.5.3. MAXWELL-GLEICHUNGEN (Zus. fassung)

verwende Hilfsfelder

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ falls $\vec{D} \parallel \vec{E}$ mit $\varepsilon_r = 1$ im Vakuum

$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ $\quad$ $\vec{H} \parallel \vec{B}$ $\quad$ $\mu_r = 1$

Integrale Form $\qquad\qquad$ Differenzielle Form

Gauß'scher Satz (geschlossene Fläche A)

① $\boxed{\oint\!\!\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{EIN}}$ $\qquad$ $\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho}$

② $\boxed{\oint\!\!\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$ $\qquad$ $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$

Stokes'scher Satz (Fläche A mit Rand ∂A)

③ $\boxed{\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{EIN} + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}$ $\qquad$ $\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

④ $\boxed{\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}}$ $\qquad$ $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Allgemeine Lorentzkraft

⑤ $\boxed{\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)}$

Maxwellgleichungen sind

gekoppelte DGL 1. Ordnung

$$\begin{tikzcd} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \arrow[rr, bend right, "\text{erzeugt}"'] & & \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \arrow[ll, bend right, "\text{erzeugt}"'] \end{tikzcd}$$

gekoppelte DGLs!