2.5. ARBEIT, ENERGIE UND LEISTUNG

2.5.1. MECHANISCHE ARBEIT

Arbeit wird verwendet, wenn ein Körper durch Wirkung einer Kraft seinen Ort ändert.

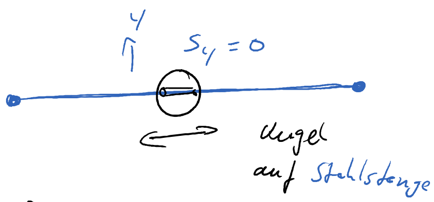
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}} \qquad \left[N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J \right] \quad \text{Joule}$$

Arbeit

Kraft

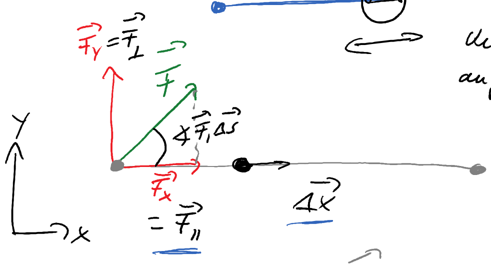
Weg (zurückgelegte Strecke)

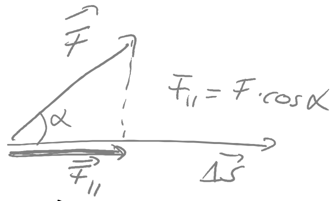
Skalarprodukt



Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta s_x \\ \Delta s_y \\ \Delta s_z \end{pmatrix}$$





$$= \underbrace{F_x}_{F_{\parallel}} \cdot \Delta s_x + \underbrace{F_y}_{=F_\perp} \cdot \underbrace{\Delta s_y}_{0} + \underbrace{F_z}_{0} \cdot \underbrace{\Delta s_z}_{0} =$$

$$= |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{s}| \cdot \cos(\sphericalangle \vec{F}, \Delta\vec{s}) = |\vec{F}_{\parallel}| \cdot |\Delta\vec{s}|$$

→ Es zählt nur die Kraftkomponente $\vec{F}_{\parallel}$ parallel zur Bewegungsrichtung

Projektion von $\vec{F}$ auf $\Delta\vec{s}$

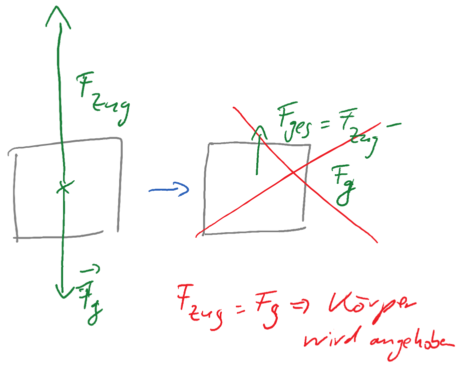
$F_\perp$ geht nicht in die Arbeit ein!

⇒ Die Bedienungen auf dem Oktoberfest verrichten keine Arbeit!

Hubarbeit:

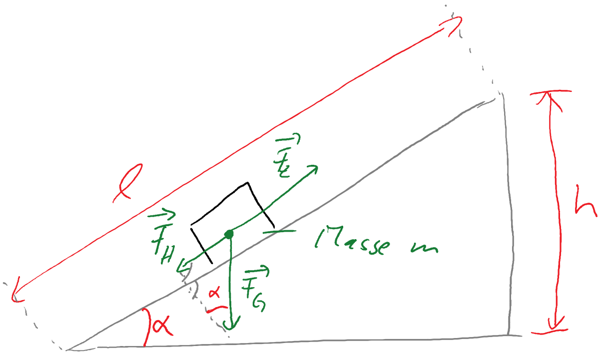
gehobene/gesenkte Höhe

$$\boxed{W_{Hub} = F_{Zug} \cdot h = m \cdot g \cdot h}$$



- $W > 0 \;\hat{=}\;$ Wir leisten Arbeit am System
- $W < 0 \;\hat{=}\;$ Das System leistet Arbeit

Gilt auch für die schiefe Ebene
reibungsfrei



$$W = \vec{F}_Z \cdot \vec{l} = F_H \cdot l$$

mit $F_H = F_G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$$l = h / \sin\alpha$$

$$\rightarrow W = m \cdot g \cdot \cancel{\sin\alpha} \cdot \frac{h}{\cancel{\sin\alpha}} = m \cdot g \cdot h$$

unabhängig von α

α klein → geringere Kraft
→ größerer Weg } gleiche Arbeit

↳ Änderung der pot. Energie

ähnliches Konzept: Flaschenzug
Hebel

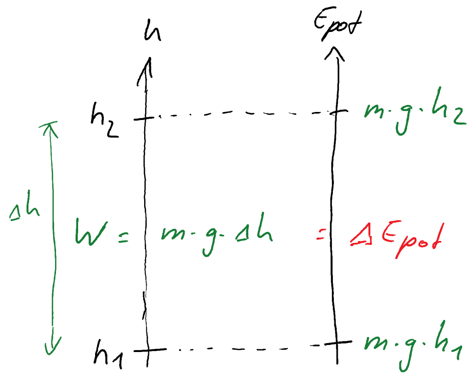
2.5.2. ENERGIE

Energie ist die Fähigkeit eines Systems Arbeit zu verrichten

Potentielle Energie (Lageenergie)

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

$$[E] = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = 1\,\frac{kg\,m^2}{s^2} = 1\,J$$



Potentielle Energie im Gravitationsfeld

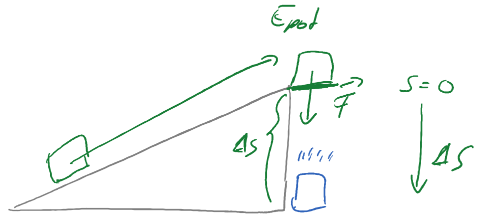
$$\Delta E_{pot} = W$$

- $W > 0$: wir verrichten Arbeit
  ↳ wir führen dem System Energie zu
- $W < 0$: System verrichtet Arbeit
  ↳ System "verliert Energie" (und führt sie uns zu)

Kinetische Energie (Bewegungsenergie)

konstante Beschleunigung durch Kraft $\vec{F}$ über Strecke $\vec{\Delta s}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{\Delta s} \underset{\vec{a} \parallel \vec{\Delta s}}{=} m \cdot a \cdot \Delta s$$



mit $\Delta s = \frac{1}{2} a t^2$ $(v_0 = 0)$

$$W = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{(a \cdot t)^2}_{at = v} = \frac{1}{2} m \underbrace{v^2}_{v^2}$$

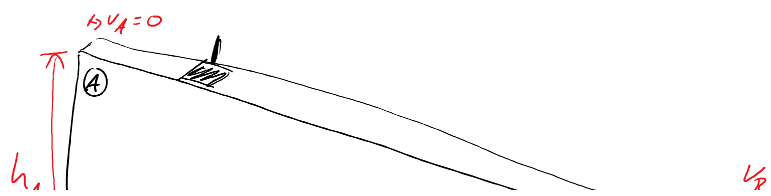
Kinetische Energie $\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2}$

2.5.3. ENERGIEERHALTUNG

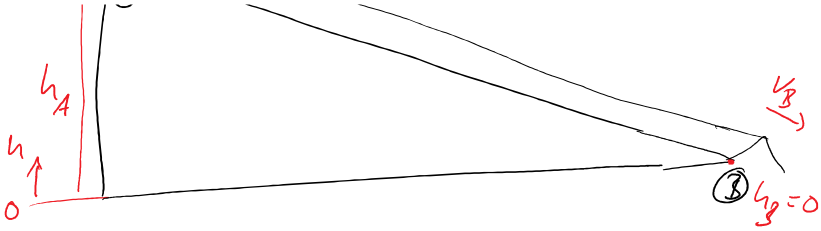
Energieformen können ineinander umgewandelt werden.

Die Gesamtenergie bleibt stets erhalten!

geneigte Luftkissenbahn
(schiefe Ebene ohne Reibung)



(schiefe Ebene ohne Reibung)



Start (A)

potentiell: $E_{pot}^A = m \cdot g \cdot h_A$

kinetische: $E_{kin}^A = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0$

$\hookrightarrow v_A = 0$

m	h_A	v_B
250g	1m	...
	2m	...
500g	1m	...
	2m	...

Ende (B)

pot: $E_{pot}^B = m \cdot g \cdot h_B = 0$

$\hookrightarrow h_B = 0$

kin: $E_{kin}^B = \frac{1}{2} m v_B^2$

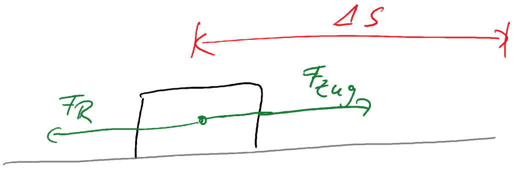
↳ Energie ist erhalten

↳ Geschwindigkeit hängt nicht von der Masse ab!

$E_{pot}^A = E_{kin}^B \rightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2$

$\rightarrow v = \sqrt{2gh}$ $\qquad h = h_A - h_B$

Reibungsarbeit

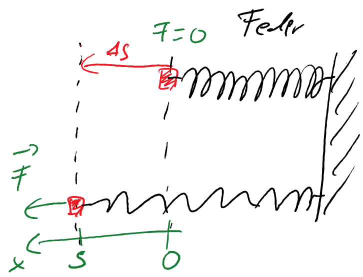


$W_{Reib} = \vec{F}_{Zug} \cdot \vec{\Delta s} =$

$= \mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta s$

Wohin geht die Energie? → innere Energie E_i = Erwärmung

Elastische Verformung



Hooke'sches Gesetz $\vec{F} = D \cdot \vec{x}$

↳ Kraft entlang des Weges ist nicht konstant!

$$W_{DEF} = \int_0^s F(x)\,dx = \int_0^s D \cdot x\,dx = D \int_0^s x\,dx = \frac{1}{2} D x^2 \Big|_0^s =$$

$$= \frac{1}{2}Ds^2 - \frac{1}{2}D0^2 = \frac{1}{2}Ds^2 = E_{DEF}$$

el. Verformungsarbeit → potentielle Energie der gespannten Feder

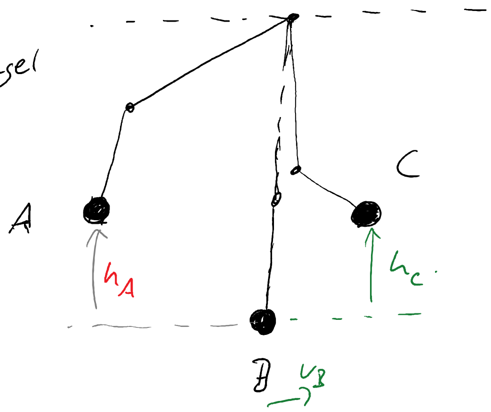
Weitere Energieformen:

- elektromagnetische Energie
  - Magneten (anziehend / abstoßend)
  - Licht
  - Strom
- chemische Energie: exotherme & endotherme Prozesse
  - exotherme ↓ E wird frei
  - endotherme ↓ E wird gebunden
- Kernenergie: Bindungsenergie v. Atomkernen

TIPP: Viele physikalische Probleme sind einfach über die Energieerhaltung zu lösen:

Wie schnell ist die Kugel in B?

Wie hoch steigt die Kugel in C?



A: $E_{kin} = 0$

$E_{pot} = m \cdot g \cdot h_A$

B: $E_{pot} = 0$

$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

$v = \sqrt{2gh_A}$

C: $E_A = E_C$

$E_{pot}^A + E_{kin}^A = E_{pot}^C + E_{kin}^C$

(E_{kin}^A ↑ 0)

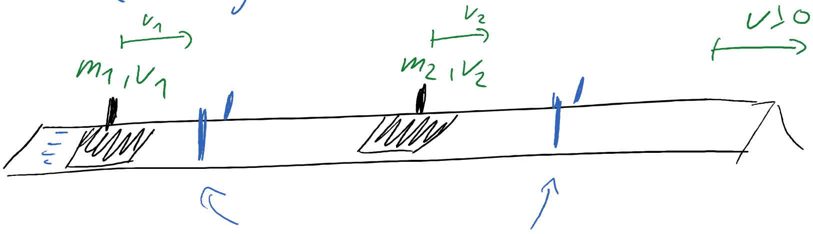
$v_C = 0$

$$m \cdot g \cdot h_A = m \cdot g \cdot h_C \quad \rightarrow \quad h_C = h_A$$

2.5.4. STOSSGESETZE

elastischer Stoß

↳ kinetische Energie bleibt erhalten



Geschwindigkeitsmessung

$v_2 < v_1 \Rightarrow$ Stoß

z.B. auch $v_1 > 0$
$v_2 < 0$

Kollision auf Luftkissenbahn

① Impulserhaltung z.B. $v_2 = 0$ wegen 2 vorher in Ruhe

$$\underbrace{m_1 v_1 + m_2 \cancel{v_2}^{=0}}_{p \text{ vorher}} = \underbrace{m_1 v_1' + m_2 v_2'}_{p' \text{ nachher}}$$

z.B.:
geg.: m_1, m_2
v_1, v_2 vor dem Stoß

ges.: v_1', v_2'

② Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}^{=0} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \Big| \cdot 2$$

Umstellen von ①

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 v_2' \quad \Big|^2$$

③ $$m_1^2 (v_1 - v_1')^2 = m_2^2 v_2'^2 \leftarrow$$

Umstellen von ②

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = -m_2 (v_2^2 - v_2'^2) = m_2 v_2'^2$$

④ $$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 v_2'^2$$

Teile ③ durch ④

$$\frac{m_1^{\cancel{2}} (v_1 - v_1')^{\cancel{2}}}{\cancel{m_1} \cancel{(v_1 - v_1')} (v_1 + v_1')} = \frac{m_2^{\cancel{2}} \cancel{v_2'^2}}{\cancel{m_2} \cancel{v_2'^2}}$$

$$m_1 \frac{v_1 - v_1'}{v_1 + v_1'} = m_2$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1'$$

$$v_1 (m_1 - m_2) = v_1' (m_1 + m_2)$$

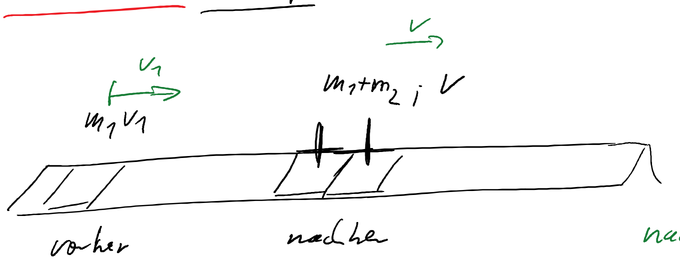
$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1}$$

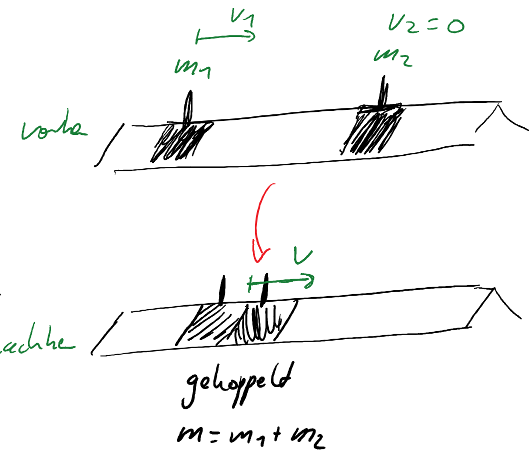
Einsetzen in (1)

$$\boxed{v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1}$$

el. Stoß für $v_2 = 0$

inelastischer Stoß:





Impulserhaltung:

$$\underbrace{m_1 v_1 + \cancel{m_2 v_2}}_{P_{vorher}} = (m_1 + m_2) \cdot v \qquad v_2 = 0$$

$v = ?$

$$\boxed{v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1}$$

z.B. $m_1 = m_2$ beide Wägen haben gleiche Masse

$$v = \frac{1}{2} v_1 \quad (\text{und } v_2 = 0)$$

Energieerhaltung?

z.B.

$$E_{vorher} = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (+0) \qquad v_2 = 0$$

$$E_{nachher} = \frac{1}{2}(2m) \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \left(\frac{1}{2} v_1\right)^2 = \frac{1}{4} m v_1^2$$

↯ ! ?

$$E_{nachher} = \frac{1}{2}(2m)\cdot V^2 = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\frac{1}{2}v_1\right)^2 = \frac{1}{4}\,m v_1^2$$

kinetische Energie ist hier nicht erhalten

↳ Umwandlung in Deformation / innere Energie